実複素多様体のセクション予想と測地線の幾何

望月 新一 （京都大学数理解析研究所）

２０００年９月

F を標数 0 の体とし、X_F を F 上の滑らかな代数多様体とする。このとき、位相幾何に出てくる「基本群」の類似として、代数多様体 X_F の**「代数的基本群」** $\pi_1^{\text{alg}}(X_F)$ は、１９６０年代に Grothendieck によって定義された。任意の被覆を統制する普通の位相幾何の基本群と違って、代数的基本群は、完全に代数的な圏で捉えられることが可能な、**有限次エタール（＝不分岐）被覆」**を統制している。例えば、$X_F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}(F)$ としたとき、

$$\pi_1^{\text{alg}}(\text{Spec}(F)) = \text{Gal}(\overline{F}/F)$$

（つまり、F の絶対ガロア群）となり、一方、$F = \mathbb{C}$ （複素数体）としたとき、

$$\pi_1^{\text{alg}}(X_F) = \varprojlim_{N} \ \pi_1^{\text{top}}(X_F(\mathbb{C}))/N$$

（ただし、$N \subseteq \pi_1^{\text{top}}(X_F(\mathbb{C}))$ は、複素多様体 $X_F(\mathbb{C})$ の指数有限な正規部分群を走る）つまり、$X_F(\mathbb{C})$ の普通の基本群の副有限完備化になる。なお、位相幾何学に出てくるホモトピー完全系列の類似もあり、それを X_F の構造射 $X_F \to \text{Spec}(F)$ に適用すると、

$$1 \to \pi_1^{\text{alg}}(X_{\overline{F}}) \to \pi_1^{\text{alg}}(X_F) \to \Gamma_F \to 1$$

（ただし、$X_{\overline{F}} \stackrel{\text{def}}{=} X_F \otimes_F \overline{F}$、$\Gamma_F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\overline{F}/F)$）のような完全系列ができる。

言い換えれば、上の状況を簡単にまとめると、

$$X_F \mapsto \{\pi_1^{\text{alg}}(X_F) \to \Gamma_F\}$$

という対応（＝もっと正確には、「関手」）を定義することができた。そこで、Grothendieck は、1983 年の Faltings 宛の手紙の中で、次のような考え方を提案した：

> 十分に '数論的' な体 $F \subseteq \mathbb{C}$ と、十分に双曲的（＝ hyperbolic）であり、かつ (C 値有理点をとったとき）位相的には '$K(\pi, 1)$' となっている多様体 X_F に対して、この関手は、充満忠実になっているであろう。

この性質を満たす多様体 X_F は、**「遠アーベル (＝ anabelian)」**という（現時点では、依然として数学的に厳密な定義を有さない）名称を付けられた。ただし、X_F の

次元＝１、つまり曲線のとき、「双曲的な曲線は遠アーベルであろう」という数学的に厳密な意味をもつ予想をたてている。この予想は、体 F が数体（＝有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大）や p 進局所体（＝ $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大）のような（やはり予想どおり）'やや数論的な体' のときには、１９９５〜６年に玉川安騎男氏と筆者 ([Tama], [Mzk1,2]) によって肯定的に解決されている。

実際、Grothendieck が最初に予想をたてたとき、どうも基礎体として、基本的には**数体**を想定していたらしいが、[Mzk2] では、**p 進局所体**の上でも Grothendieck の予想が成り立つことが示されている。このように、基礎体が数体のような「大域体」ではなく、局所体のときでも成り立つであろうと筆者が信じるに至った一番の根拠は、p 進局所体よりその構造や数論が遥かに分かりやすい、**実数体**（という同じ局所体）の上で **Grothendieck 予想の類似が成り立つ**という発見である。（実数体上の微分幾何と p 進数体上の数論幾何の間の類似については、[Mzk3], Introduction および [Mzk4], Introduction, §0.10 で詳しく解説してある。）実は、実数体の上では、数体や p 進局所体の上で知られていることよりもずっと強い形で Grothendieck の遠アーベル哲学が成り立つことが分かっている。そのより強い形とは、本講演で紹介する**「実複素多様体のセクション予想」**である。

まず、**実複素多様体**という用語を定義しなければならない。実複素多様体 (X, ι) とは、複素多様体 X とその多様体に作用する反正則な対合 $\iota : X \to X$ からなる組みのことである。この概念は、実数体の上で定義された（滑らかな）代数多様体の一般化であり、そのような代数多様体に対して一つの実複素多様体が自然に定まるが、代数的なものから発生しない、「真に解析的な」実複素多様体もある。実複素多様体 (X, ι) が与えられると、X を ι の作用で、real analytic stack （＝ real analytic orbifold）の圏において割ることによって、real analytic な stack X_ι が定まり、その（普通の位相幾何の意味での）基本群を考えることによって、上の代数的な話に出てきた完全系列の類似ができる：

$$1 \to \pi_1^{\mathrm{top}}(X) \to \pi_1^{\mathrm{top}}(X_\iota) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \to 1$$

なお、実数体上の代数多様体の $\mathbb{R}$ **値有理点**の類似を、

$$X^\iota \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in X \mid \iota(x) = x\}$$

と定義すると、stack または orbifold の定義より、X^ι の各点 $x \in X^\iota$ は、上の完全系列の自然な section

$$\alpha_x : \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \to \pi_1^{\mathrm{top}}(X_\iota)$$

を、($\pi_1^{\mathrm{top}}(X)$ に関する共役を除いて）定める。しかも、容易に確認されるように、section α_x は、x が所属する X^ι の連結成分 $[x] \in \pi_0(X^\iota)$ だけで決まる。

以下の議論では、取り扱う実複素多様体に対して次のような**微分幾何学的な**条件を課したい。まず、X を任意の微分多様体とし、μ_X を、X 上のリーマン計量とする。もし X の（普通の位相幾何の意味での）普遍被覆空間を $\widetilde{X} \to X$ と書くと、μ_X を $\widetilde{X}$ に引き戻すことによって $\widetilde{X}$ 上に計量 $\mu_{\widetilde{X}}$ が定まり、特に、微分多様体 $\widetilde{X}$ に（一

つの）「リーマン幾何」が入る。そのリーマン幾何付き空間 $(\widetilde{X}, \mu_{\widetilde{X}})$ が**「straight line space」**（以下では、**SLS** と略す）であるとは：

> $\widetilde{X}$ の任意の相異なる二点 $x_1, x_2 \in \widetilde{X}$ に対して、その二点を結ぶ測地線が、只一つ存在する。

ということである。例えば、普通の計量を入れたとき、複素平面（計量＝ユークリッド計量）も上半平面（計量＝ Poincaré 計量）も SLS になるが、（普通の計量入りの）球面 S^2 やユークリッド計量入りの一点抜きの複素平面 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ は、（すぐ確認されるように）SLS にはならない。

さて、これで必要な用語が揃ったので、本講演の主定理（詳しくは [Mzk5], Theorem 3.6 を参照）を紹介したい：

Theorem A. (X, ι) は実複素多様体とし、μ_X は、反正則な対合 ι の作用の下で不変であり、かつ $(\widetilde{X}, \mu_{\widetilde{X}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mu_X|_{\widetilde{X}})$ が *SLS* となるような、X 上のリーマン計量とする。すると、上で定義した $X^\iota \ni x \mapsto \alpha_x$ という対応によって決まる写像

$$\pi_0(X^\iota) \to \mathrm{Sect}_{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}(\pi_1^{\mathrm{top}}(X_\iota))$$

（ただし、右辺は、$(\pi_1^{\mathrm{top}}(X)$ に関する共役を除いての）$\pi_1^{\mathrm{top}}(X_\iota) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の *section* 全体を表すとする）は全単射になる。

この定理の仮定を満たす典型的な実複素多様体として、次の例が挙げられる：

(1) 実数体上の双曲的な代数曲線。

(2) 実数体上の双曲的な代数曲線のモジュライ・スタック。

(3) 実数体上のアーベル多様体。

(4) 実数体上の主偏極アーベル多様体のモジュライ・スタック。

特に、このリストの中には、Grothendieck の遠アーベル哲学が成り立ちそうな多様体は全部含まれるのである。

この定理の証明のあらすじはだいたい次のとおりである。まず、X の普遍被覆空間 $\widetilde{X}$ が、ι の作用で割って作った orbifold X_ι の普遍被覆空間でもあることから、$\pi_1^{\mathrm{top}}(X_\iota)$ は $\widetilde{X}$ に自然に作用する。一方、簡単に確認できるように、集合 $\mathrm{Sect}_{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}(\pi_1^{\mathrm{top}}(X_\iota))$ は、$\pi_1^{\mathrm{top}}(X_\iota)$ 内の位数 2 の元 τ の供役類と自然に同一視され、被覆と変換群の一般論を用いると、定理が主張する全単射性は、次のことと同値であることを示すことができる：

> そのような位数 2 の元 τ に関する $\widetilde{X}$ の不動点集合
>
> $$\widetilde{X}^\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \widetilde{X} \mid \tau(x) = x\} \subseteq \widetilde{X}$$

は、空でない、連結な集合になる。

それでは、まず空にならないことを証明しよう。$x_1 \in \widetilde{X}$ を $\widetilde{X}$ の勝手な点とし、$x_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau(x_1)$ とする。もし $x_1 = x_2$ ならば、$x_1 \in \widetilde{X}^\tau$ ということになるから、$\widetilde{X}^\tau$ が空にならないという証明は終わる。一方、$x_1 \neq x_2$ のとき、$\widetilde{X}$ が **SLS** になるという仮定を適用すると、x_1 と x_2 を、ある（unique な）測地線で結ぶことができる。今、その測地線の**中点** x をとると、計量 $\mu_{\widetilde{X}}$ が $\pi_1^{\mathrm{top}}(X_\iota)$ の作用の下で不変であることと、対合 τ が二点集合 $\{x_1, x_2\}$ を保つことから、τ が中点 x をも保つことが、測地線の一意性より直ちに従う。つまり、$x \in \widetilde{X}^\tau$ ということになるから、これで $\widetilde{X}^\tau$ が空にならないことの証明が完結する。実は、連結性も同じような議論から帰結される。（もし $\widetilde{X}^\tau$ が連結でなかったら、相異なる連結成分に属する点 x_1 と x_2 を選ぶと、その二点を結ぶ unique な測地線全体が、（τ が $\mu_{\widetilde{X}}$ を保つことと、$\tau(x_1) = x_1, \tau(x_2) = x_2$ より）τ に固定されてしまう。つまり、測地線の点全体が $\widetilde{X}^\tau$ に入っていることになるから、x_1 と x_2 が $\widetilde{X}^\tau$ の相異なる連結成分に属しているという仮定に反する。証明終。）

最後に、上の**中点議論**だが、これは決して筆者が新しく発見したものではなく、Teichmüller 理論ではごく標準的な手法であり、同理論の歴史の中では、正にこのような議論ができるような状況を整えておくことが、Teichmüller 空間の測地線の幾何の研究の大きな動機付けとされてきた。

文献

[Mzk1] S. Mochizuki, *The Profinite Grothendieck Conjecture for Closed Hyperbolic Curves over Number Fields*, *J. Math. Sci., Univ. Tokyo* **3** (1996), pp. 571-627.

[Mzk2] S. Mochizuki, *The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves*, *Inv. Math.* **138** (1999), pp. 319-423.

[Mzk3] S. Mochizuki, *A Theory of Ordinary p-adic Curves*, *Publ. of RIMS* **32** (1996), pp. 957-1151.

[Mzk4] S. Mochizuki, *Foundations of p-adic Teichmüller Theory*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **11**, American Mathematical Society/International Press (1999).

[Mzk5] S. Mochizuki, *Topics Surrounding the Anabelian Geometry of Hyperbolic Curves*, RIMS Preprint ??.

[Tama] A. Tamagawa, *The Grothendieck Conjecture for Affine Curves*, *Compositio Math.* **109**, No. 2 (1997), pp. 135-194.